Considéré comme le mathématicien le plus prolifique de tous les temps, Leonhard Euler domine les mathématiques du XVIIIe siècle et développe très largement ce qui s'appelle alors l'analyse. Né le 15 avril 1707 à Bâle en Suisse, il est décédé le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg, à l'âge de 76 ans. Complètement aveugle pendant les douze dernières années de sa vie, il produit presque la moitié de son travail durant cette période.

Leonhard Euler
1707-1783

Dossier

GRANDS Mathématiciens

André Ross
Cégep de Lévis-Lauzon

Leonhard Euler

Issu d'une famille modeste, Euler débute sa formation dans une école qui n'offre que l'enseignement élémentaire. Son père l'initie aux premiers éléments des mathématiques. À 13 ans, il débute des études en philosophie et en droit à l'Université de Bâle et obtient son diplôme de philosophie à 16 ans. Son père souhaite le voir devenir pasteur et le pousse vers des études de théologie. Les cours de l'éminent mathématicien Jean Bernoulli (1667-1748), un ami de son père, ont changé la vie d'Euler. Remarquant le talent pour les mathématiques de son élève, Bernoulli l'encourage à poursuivre dans cette discipline.

À l'époque, la Suisse n'offre pas la possibilité de poursuivre une carrière ambitieuse en sciences. Heureusement, en 1727, à l'âge de 20 ans, sur la recommandation de Daniel (1700-1782) et de Nicolas Bernoulli (1687-1759), il est appelé à Saint-Pétersbourg par Catherine II, impératrice de Russie. Il devient alors membre de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg. Il est médecin militaire dans la marine russe de 1727 à 1730, puis professeur de physique à l'Académie en 1730. En 1733, il succède à Daniel Bernoulli à la chaire de mathématiques et à partir de 1740, il devient également responsable de la section de géographie.

En 1741, il devient membre de l'Académie des sciences de Berlin à l'invitation du roi de Prusse Frédéric II, qui voulait réorganiser l'Académie de Berlin.

À la demande de Frédéric, il donne des leçons à la princesse Sophie Charlotte von Brandebourg-Schwedt agée de 15 ans, la fille d'un de ses cousins. Données en français, la langue utilisée à la cour de Frédéric, ces leçons durent jusqu'à la Guerre de Sept ans, ce qui force Frédéric à fuir Berlin. Euler, resté à Berlin, poursuit alors ses leçons en rédigeant des lettres à la princesse, il y en aura en tout 234. Rédigées entre 1760 et 1762, elles furent publiées en trois volumes sous le titre *Lettres à une princesse d'Allemagne* et constituent un important ouvrage de vulgarisation scientifique car Euler, dans ses présentations, fait en sorte qu'elles ne nécessitent pas de connaissances préalables. Dans ces lettres, Euler aborde divers sujets : l'optique, la gravitation universelle, la philosophie, la logique, la liberté des êtres intelligents, le syllogisme, la latitude, la longitude, les éclipses, le magnétisme et la réfraction de

la lumière. Euler est demeuré à Berlin durant 25 ans pour retourner à Saint-Petersbourg en 1766, après une dispute sur la liberté académique avec Frédéric le Grand.

Au début de la trentaine, Euler avait perdu son œil droit. Peu après son retour en Russie, il devient presque entièrement aveugle après l'opération d'une cataracte. Malgré ce handicap, il poursuit ses recherches. Soutenu par une mémoire phénoménale, il dicte ses textes à ses fils ou à son valet, en ayant toujours le souci de la clarté dans ses écrits. La moitié de son œuvre, abordant toutes les branches des mathématiques, est produite après 1765. Auteur de 900 travaux, mémoires et livres sur le calcul différentiel, les mathématiques analytiques, l'algèbre, la mécanique, l'hydrodynamique, l'astronomie et l'optique, il meurt à Saint-Pétersbourg en 1783.

Euler a laissé son nom à plusieurs notions et concepts, tant en physique qu'en mathématiques. Il a développé le calcul différentiel de Wilhelm Gottfried Leibniz (1646-1716), la méthode des fluxions d'Isaac Newton (1642-1727), prolongé les travaux des Bernoulli et fondé la notion d'équation aux dérivées partielles. Il est l'un des fondateurs du calcul des variations, qui consiste à expliquer les lois de la physique à l'aide de principes d'optimisation.

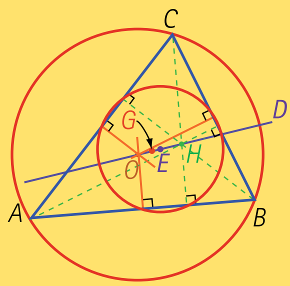
Droite et cercle d'Euler

Plusieurs des prédécesseurs d'Euler avaient étudié les propriétés des triangles. On savait que dans un triangle quelconque les hauteurs se rencontrent en un point appelé l'*orthocentre H* du triangle, les médiatrices se rencontrent en un point *O* qui est le *centre du cercle circonscrit* au triangle et les médianes se rencontrent en un point *G* qui est le *centre de gravité* du triangle. Euler a été le premier à constater que ces trois points sont alignés et la droite obtenue est appelée *droite d'Euler*. De plus, le point milieu du segment *OH* est le centre du cercle d'Euler, qui passe par les neuf points suivants :

- les points milieux des trois côtés;
- le pied de chacune des trois hauteurs;
- le milieu de chacun des trois segments reliant l'orthocentre *H* à un sommet du triangle.

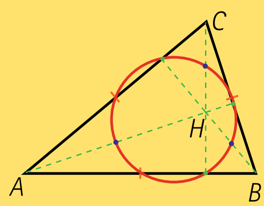
De plus, il est circonscrit aux triangles formés par chacun de ces ensembles de trois points.

Droite d'Euler



O Centre du cercle circonscrit, point de rencontre des médiatrices des côtés
H Orthocentre, point de rencontre des hauteurs
G Centre de gravité, point de rencontre des médianes
D Droite d'Euler
E Point milieu de *OH*, centre du cercle d'Euler

Cercle d'Euler



- Point milieu d'un côté
- Pied d'une hauteur
- Point milieu d'un segment joignant l'orthocentre *H* à un sommet

Exponentielle et nombre d'Euler

Dans ses recherches sur l'exponentielle, Euler se demande s'il existe des coefficients *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, ... tels que a^x s'écrive comme un polynôme en *x*. C'est-à-dire :

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots ?$$

En posant $x = 0$, il trouve que $A = 1$. Par conséquent :

$$a^x = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots$$

De plus, on doit avoir $a^{2x} = (a^x)^2$. Par substitution, le premier membre de l'équation donne :

$$a^{2x} = 1 + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + 16Ex^4 \dots$$

et le développement du deuxième membre donne :

$$\begin{aligned}(a^x)^2 &= (1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots)^2 \\ &= 1 + 2Bx + (2C + B^2)x^2 + (2D + 2BC)x^3 \\ &\quad + (2E + 2BD + C^2)x^4 + \dots\end{aligned}$$

Les deux membres sont égaux si les coefficients des termes de même degré sont égaux. Le coefficient en *x* est 2*B* dans les deux membres. En égalant les coefficients de x^2, on obtient :

$$4C = 2C + B^2, \text{ d'où } 2C = B^2 \text{ et } C = \frac{B^2}{2}.$$

En égalant les coefficients de x^3, on obtient :

$$8D = 2D + 2BC, \text{ d'où } 3D = BC \text{ et } D = \frac{BC}{3} = \frac{B}{3} \times \frac{B^2}{2} = \frac{B^3}{2\times 3}.$$

En égalant les coefficients de x^4 et en isolant *E*, on a :

$$E = \frac{7B^4}{14\times 3\times 4} = \frac{B^4}{2\times 3\times 4}.$$

En poursuivant de proche en proche, Euler obtient :

$$a^x = 1 + Bx + \frac{B^2}{2}x^2 + \frac{B^3}{2\times 3}x^3 + \frac{B^4}{2\times 3\times 4}x^4 + \dots$$

Pour alléger l'écriture, on pose $2\times 3\times 4\times \dots \times n = n!$. La fonction exponentielle la plus simple est obtenue en posant $B = 1$:

$$a^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

La valeur de *a* pour $x = 1$, est :

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = 2{,}7182818\dots$$

Le nombre obtenu, 2,7182818..., appelé *nombre d'Euler*, a un développement décimal illimité non périodique et est désigné par *e*, la première lettre du nom Euler. L'exponentielle de base *e* s'écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Nombre d'Euler

On peut définir le nombre d'Euler de la façon suivante : $$e=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Sous cette forme, le nombre d'Euler a des applications en gestion.

Dans le calcul des intérêts, la relation $1+r=(1+j/m)^m$ donne le taux réel r correspondant à un taux nominal j capitalisé m fois par année. Plus la durée de la période de capitalisation est courte, plus m est grand. À la limite, lorsque m tend vers l'infini, on dit que l'intérêt est continu. On a alors :

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^m=e^j.$$

Donc, si la capitalisation se fait de façon continue, on a :

$$1+r=e^j, \text{ d'où } j=\ln(1+r)$$

et le taux d'intérêt continu j équivalent au taux réel r est $j=\ln(1+r)$. En pratique, un intérêt journalier peut être considéré comme un intérêt capitalisé de façon continue.

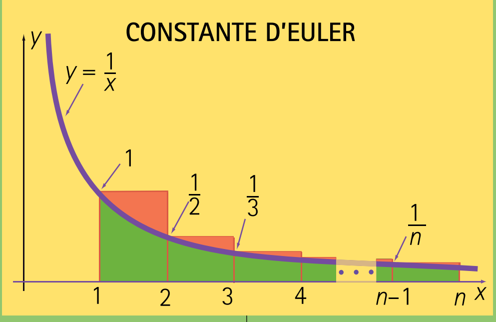
Constante d'Euler

Dans *Introductio in analysin infinitorum* (1748), Euler établit la célèbre constante, notée γ (gamma), qui porte aujourd'hui son nom et est définie par :

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

Dans la figure ci-contre, la somme des aires des rectangles[1] dans l'intervalle $[1;\, n+1]$ est :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$$



Par ailleurs, on voit en calcul intégral que l'aire sous la courbe de $f(x)=1/x$ dans l'intervalle $[1;\, n]$ est donnée par $\ln n$. La limite lorsque n tend vers l'infini de chacune de ces expressions est l'infini, cependant leur différence est finie. C'est la constante d'Euler, soit la différence entre l'aire des rectangles et celle sous la courbe de $f(x)=1/x$, dans l'intervalle $[1;\infty[$. On ne sait si ce nombre est rationnel ou irrationnel, mais on en connaît 108 000 000 décimales :

$$\gamma = 0{,}57721566490153286060\ldots$$

Euler a fait beaucoup de manipulations avec des séries divergentes (aujourd'hui interdites dans les collèges et les cours de baccalauréat des universités, mais réhabilitées auprès des chercheurs). À titre d'exemple, regardons comment il prouve que :

$$\zeta=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\prod_{p\text{ premier}}\frac{p}{p-1}$$

Cette démonstration est considérée comme une autre preuve qu'il y a un nombre infini de nombres premiers. En effet, puisque la série harmonique diverge, le produit est infini. Il doit donc comporter un nombre infini de facteurs et chaque facteur est associé à un nombre premier.

Dans sa démonstration, Euler redispose les termes pour séparer les termes dont le dénominateur est pair de ceux dont le dénominateur est impair et, dans le premier regroupement, il met 1/2 en évidence :

$$\zeta=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\right).$$

La série à l'intérieur de la première parenthèse est ζ, d'où :

$$\zeta=\frac{1}{2}\zeta+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\right).$$

Cela donne : $\frac{1}{2}\zeta=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

Il regroupe ensuite les termes dont le dénominateur est un multiple de 3 et met 1/3 en évidence, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\zeta=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\right)+\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots\right).$$

La série à l'intérieur de la première parenthèses est $\zeta/2$ et, en substituant :

$$\frac{1}{2}\zeta=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta+\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots\right),$$

d'où : $$\frac{1}{2}\zeta-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta=\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}\ldots\right).$$

1. *Ces termes sont ceux de la série harmonique qui diverge et dont la divergence est lente.*

En regroupant les termes dont le dénominateur est divisible par 5, il obtient :

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...\right)+\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+...\right)$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta+\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+...\right),$$

d'où : $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta=\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+...\right).$

En poursuivant ainsi pour tous les nombres premiers, il établit que :

$$...\frac{10}{11}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta=\frac{1}{1},\text{ et}$$
$$\zeta=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}...=\prod_{p\text{ premier}}\frac{p}{p-1}$$

Il a appliqué la même procédure au problème de la somme des inverses des carrés des nombres entiers qui, en 1673, avait été posé à Leibniz par Henry Oldenburg, secrétaire de la Royal Society. Euler a établi, en regroupant et en mettant successivement en évidence les carrés des nombres premiers, que :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48}...$$

Par ses calculs, il a estimé que cette somme était $\pi^2/6$, conjecture qui a été démontrée par la suite. Euler a procédé de la même façon pour les différentes puissances des inverses et a obtenu ce que nous notons maintenant $\zeta(s)$ et qui est appelée *fonction de Riemann*, soit :

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\text{ premier}}\frac{p^s}{p^s-1}=\prod_{p\text{ premier}}\frac{1}{1-1/p^s}.$$

Cette fonction est à l'origine des grands développements modernes de la théorie des nombres.

Notations d'Euler

Dans ses publications, Euler a introduit différentes notations qui sont aujourd'hui d'usage courant :

- $f(x)$; pour désigner l'image d'un nombre x par une fonction f.
- i; pour la racine carrée de -1.
- e; pour la base des logarithmes naturels.
- π; pour le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre.
- Σ pour représenter de façon succincte une somme de termes.

Nombres complexes et identité d'Euler

La représentation d'une exponentielle par un polynôme infini est généralisable aux nombres complexes et cela a permis à Euler d'obtenir de beaux résultats. Un nombre complexe z est un nombre de la forme $a + ib$, où a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$. En substituant ix à x dans le développement polynomial de e^x, on obtient :

$$e^x=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^6}{6!}+...$$
$$=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-\frac{ix^7}{7!}+...$$
$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...\right).$$

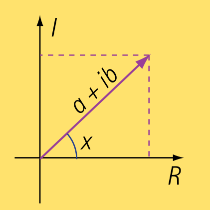
Reconnaissant le développement en série de Taylor[1] des fonctions cosinus et sinus, soit :

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...$$
$$\text{et }\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$$

Euler en déduit que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, ce qui met en relation la trigonométrie et l'analyse complexe.

Exploitons la représentation graphique moderne des nombres complexes pour bien saisir le sens de cette équation. Un nombre complexe z est représenté dans un système d'axes orthogonaux, comportant un *axe des réels R* et un *axe des imaginaires I*, par un vecteur allant de l'origine (0; 0) au point $(a; b)$. On constate que le vecteur $a + ib$ est également caractérisé par sa longueur r, appelé le *module* de z et l'angle x, appelé *argument*, qu'il fait avec la direction positive de l'axe des réels. Cela donne :

$$z = re^{ix} = r(\cos x + i \sin x).$$



Si le vecteur est unitaire, $r = 1$, on a :

$$z = e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

L'équation du cercle unitaire centré à l'origine est alors :

$$z = e^{ix} \text{ pour } 0 \le x \le 2\pi.$$

Pour $x = \pi$, le nombre complexe correspondant est :

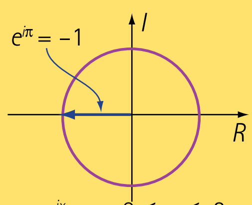
$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i\,0 = -1.$$

Donc $e^{i\pi} = -1$, ou encore :

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Cette identité, appelée *identité d'Euler*, met en relation cinq constantes mathématiques : 0 et 1, les éléments neutres de l'addition et de la multiplication, e la base des logarithmes naturels, π le rapport de la circonférence au diamètre du cercle et i, le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

Cercle unitaire



$z = e^{ix}$ pour $0 \le x \le 2\pi$

1. Brook Taylor (1685-1731), mathématicien anglais.